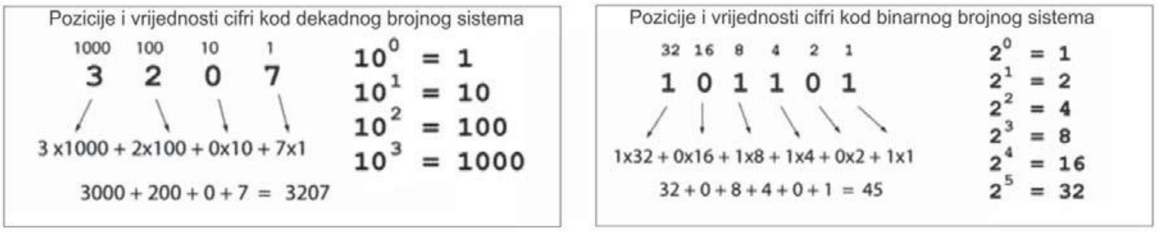
Brojni sistemi

Brojni sistem je sistem pomosu kojeg se predstavljaju brojevi.
Brojevi se predstavljaju skupom simbola koji se nazivaju cifre.
Sastoje se od skupa cifara koji cini njihovu azbuku $A = \prec \{a_1, a_2, a_3, ..., a_N\}$.
Broj n cifara azbuke zovemo osnovom-bazom sistema.
Najcešse su u upotrebi pozicioni – težinski brojni sistemi[24].
Cifre pozicionih brojnih sistema u broju daju vrijednost u zavisnosti od mesta (pozicije) **na kome se nalaze (lijevo od decimalnog zareza pozicije su 0, 1, 2, ... a desno su -1, -2, ...).** Za razumijevanje brojnih sistema potrebno je napraviti razliku izmedu broja i njegovog predstavljanja. Npr. broj dva (dvije kruške) se može predstaviti kao 2, u slucaju da koristimo dekadni sistem, ali i kao 10 ako se koristi binarni sistem.



Slika 1. 16 Primjer pozicionih vrijednosti kod dekadnog i binarnog brojnog sistema

Težina pojedinog mjesta zavisno od brojnog sistema kod pozicionih brojnih sistema.

BROJNI SISTEM	OSNOVA	CIFRE
BINARNI	2	0, 1
DEKADNI	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
HEKSADECIMALNI	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F (A=10, B=11, C=12, D=13, E=14, F=15)

Principijelno je mogus sistem na bilo kojoj bazi. Mogus je i sat sa brojcanikom kao na Slici 1.17. Ali teško da bi mogli resi da je on pogodan za bilo koga.

Slika 1. 17 Sat sa reprezentacijom sati u binarnom zapisu

1.6.1 Dekadni brojni sistem

Najpoznatiji pozicioni brojni sistem je dekadni i on ima bazu 10.
Kod dekadnog brojnog sistema brojimo *'nula, jedan, dva, tri, šetiri, pet, šest, sedam, osam, devet*, **deset**, gdje je „deset“ u suštini „nula jedan dalje“. Dekadni brojni sistem je pozicioni brojni sistem sa bazom 10 u kojem se zapis sastoji od cifara 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Svaki broj se može predstaviti kao zbir eksponenata broja 10.
Bilo koji **n**-cifreni cijeli dekadni broj može predstaviti nizom:

$$A = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

gdje koeficijenti $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ predstavljaju cifre dekadnog broja i imaju vrijednost od 0 do 9.

Težinska vrijednost je vrijednost cifre u zavisnosti od njenog mjesta u nekom broju. To znaci da se prvobitna vrijednost cifre množi brojem 10 za svaku poziciju lijevo od posljednje cifre u zapisu broja.

---
[24] primjer netežinskog brojnog sistema su rimski brojevi

Slicno cjelobrojnim, predstavljaju se i decimalni brojevi. Vrijednosti iza decimalnog zareza množe se sa odgovarajusim eksponentom kome se pridružuje negativna vrijednost.
Kao ilustraciju možemo dati primjer dekadnog broja 4275,59 koji se može predstaviti kao: $4\cdot10^3+2\cdot10^2+7\cdot10^1+5\cdot10^0+5\cdot10^{-1}+9\cdot10^{-2}$

Za binarni brojni sistem koriste se nazivi dvije cifre iz dekadnog sistema; nula (0) i jedan (1).
U racunarstvu se najcešse koristi binarni brojni sitem sa bazom 2, koji ima samo dvije cifre 0 i 1.
U racunarstvu je **binarni sistem** izabran jer postoji veliki broj elektronskih sklopova koji mogu da se nalaze u dva jedinstvena stabilna stanja. Ova stanja mogu biti: otvoren/zatvoren, visok/nizak, lijevo/desno, ili ukljucen/iskljucen. Mnogo je teže realizovati elektronske sklopove koji se imati tri, cetiri ili više razlicitih stabilnih stanja.
Svaka binarna cifra se naziva bit. Sama rijec bit (*bit*) je prvi put upotrebljena 1948. godine u radu Kloda Šenona i nastala je sklapanjem pocetka engleske rijeci "binarna" i kraja rijeci "cifra" ili "jedinica" na engleskom jeziku *BInary digiT*.

1.6.2 Binarni sistem

Binarni ili dualni sistem je prvi koristio Leibniz u 17. vijeku. Danas je pored dekadnog sistema ovo najrasprostranjeniji brojni sistem.
Binarni sistem je sistem na bazi 2, u kome se za oznacavanje brojeva koriste iskljucivo dvije cifre (0 i 1).
Bilo koji **cijeli binarni broj** se može predstaviti kao niz:

$$A = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + a_1 2^1 + a_0 2^0$$

gdje koeficijenti a_0, a_1, a_2,....,a_n imaju vrijednost 0 ili 1 i predstavljaju cifre binarnog broja. Svaki clan u ovom nizu ima dvostruku težinu u odnosu na prethodni clan, što je pokazano Tabeli 1.2.

težinske vrijednosti	...	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-3}	...
dekadni ekvivalent	...	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	...

Tabela 1.2 Težine cifri u u binarnom brojnom sistemu

Zadatak: **Rastaviti broj** 10011101 prema definiciji predstavljanja binarnog broja kao niza i odrediti koji je to dekadni broj.
Rješenje: $1\bullet 2^7 + 0 \bullet 2^6 + 0 \bullet 2^5 + 1\bullet 2^4 + 1\bullet 2^3 + 1\bullet 2^2 + 0 \bullet 2^1 + 1\bullet 2^0 = 128 + 16 + 8 + 4 + 1 = 157$
Ekvivalentno predstavljanju cijelih brojeva, vrijednost binarnih brojeva iza decimalnog zareza predstavlja se korištenjem negativnih eksponenata.

1.6.3 Oktalni sistem

Oktalni brojni sistem je pozicioni brojni sistem sa bazom 8. To znaci da se svaki broj može predstaviti kao zbir eksponenata broja 8. Oktalni sistem se cesto primjenjuje u racunarstvu i informatici.

3	0	2	4	7	Oktalni broj

$8^4\ 8^3\ 8^2\ 8^1\ 8^0$ Decimalno

$7 \cdot 8^0 =$	7
$4 \cdot 8^1 =$	32
$2 \cdot 8^2 =$	128
$0 \cdot 8^3 =$	0
$3 \cdot 8^4 =$	12288
	12455

Primjeri pretvaranje oktalnog broja u decimalni

1.6.5 Heksadecimalni sistem

Heksadecimalni brojni sistem je težinski brojni sistem sa bazom 16. Kao cifre se koriste: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F.
Cifre 0-9 imaju istu vrijednost kao u dekadnom sistemu. Broj 10 se piše kao A, broj 11 kao B, 12-C, 13-D, 14-E i 15-F.
n-cifreni cijeli brojevi u hexadecimalnom brojnom sistemu sa pozicionom notacijom se se mogu predstaviti kao niz:

$$A = a_n 16^n + a_{n-1} 16^{n-1} + \cdots + a_1 16^1 + a_0 16^0$$

gdje koeficijenti a_0, a_1, a_2,....,a_n imaju vrijednost 0 do 15 i predstavljaju cifre heksadecimalnog brojnog sistema.

Heksadecimalni brojni sistem ima veliku prakticnu vrijednost jer mu je baza eksponent broja 2, koji je osnova binarne logike. Svaka cifra u heksadecimalnom sistemu mijenja 4 uzastopne cifre binarnog sistema. Heksadecimalni sistem se koristi u racunarstvu u kombinaciji sa binarnim sistemom jer omogusava jednostavnu konverziju. 4 mjesta u binarnom sistemu zauzimaju samo jedno mjesto u heksadecimalnom sistemu.
Na primjer **binarni** broj 1110 0001 1111 1101 se **heksadecimalno krase** prikazuje kao E1FD.

DECIMALNI	BINARNI	OKTALNI	HEKSADECIMALNI
0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Tabela 1.3 Najšešsi brojni sistemi

1.6.6 Primjeri konverzija iz jednog brojnog sistema u drugi

Šesto se javlja potreba za pretvaranjem (konverzijom) brojeva iz jednog brojnog sistema u neki drugi brojni sistem.
Ukoliko je baza brojnog sistema u kome se nalazi broj kog želimo konvertovati, vesa od baze broja u koji sistem želimo izvršiti konverziju, najjednostavnije semo to uciniti tako što broj dijelimo bazom brojnog sistema u kojeg ga pretvaramo sve dok kolicnik ne bude 0 a potom prepišemo ostatke dijeljenja unazad. Ovako opisana procedura naziva se **dijeljem sa modulom**, gdje je modul (MOD) ostatak cjelobrojnog dijeljenja.
Za **obrnutu konverziju brojeva** (*iz sistema koji koristi manju bazu u sistem koji ima vesu bazu*) koristiti se **direktno sumiranje (rastavljanje) šlanova**, kako je ranije objašnjeno na primjeru rastavljanja binarnog broja

1.6.6.1 Konverzija decimalnog broja u binarni

Dekadni broj se dijeli sa 2 (2 je baza binarnog brojnog sistema), a ostatak dijeljenja posebno zapisuje.
Konvertovani broj se dobija kada se napišu cifre ostatka obrnutim redom od onog kako su dobijene.

Zadatak: $157_{10}=?_2$

157	:	2	=	78	(1)
78	:	2	=	39	(0)
39	:	2	=	19	(1)
19	:	2	=	9	(1)
9	:	2	=	4	(1)
4	:	2	=	2	(0)
2	:	2	=	1	(0)
1	:	2	=	0	(1)

Rješenje: $157_{10}=10011101_2$

Decimalni brojevi manji od jedinice (brojevi sa decimalnim zarezom manji od 1) konvertuje se u binarni tako što se razlomljeni dio množi sa 2 i postupak nastavlja dok razlomljeni dio ne postane nula.
Primjer konverzije broja 0,375

0,375	*2	=0,75	=0,75	+0
0,75	*2	=1,5	=0,5	+1
0,5	*2	=1	=0	+1

Rješenje $(0,375)_{10}=(0,011)_2$

Konverzija brojeva koji nisu cijeli ne može uvijek izvesti do kraja, što podrazumijeva primjenu aproksimacija.
Primjer:

0,792	*2	=1,584	=0,584	+1
0,584	*2	=1,168	=0,168	+1
0,168	*2	=0,336	=0,336	+0
0,336	*2	=0,672	=0,672	+0
0,672	*2	=1,344	=0,344	+1
0,344	*2	=0,688	=0,688	+0
0,688	*2	=1,376	=0,376	+1

Rješenje $(0,792)_{10}=(0,1100101...)_2$

Aproksimacija ne znaci da je binarni sistem manje precizan. To znaci binarni sistem zahtijeva vesi broj cifara za izražavanje odredene velicine željenom preciznošsu.

Konverzija mješovitih decimalnih brojeva vrši se tako što se **posebno konvertuje cjelobrojni dio, a posebno dio sa razlomljenim vrijednostima**, pa se dobijeni rezultati sabiraju.

Za **obrnutu konverziju binarnih brojeva u decimalne** može se koristiti **direktno sumiranje šlanova**, kako je ranije objašnjeno na primjeru rastavljanja binarnog broja.

Ovo semo još jednom pokazati na primjeru gdje se traži konverzija binarnog broja $(110011101,01)_2$
Rješenje. Svakoj poziciji se pridruži vrijednost eksponenta koja se množi sa vrijednošsu binarne cifre (0 ili 1):
$1 \cdot 2^8+1 \cdot 2^7+0 \cdot 2^6+ 0 \cdot 2^5 +1 \cdot 2^{4} +1 \cdot 2^3+ 1 \cdot 2^2+ 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^{0}$ **,** $0 \cdot 2^{-1}+ 1 \cdot 2^{-2}$
256+128+16+8+4+1**,** +1/4=413,25

1.6.6.2 Konverzija oktalnih brojeva u decimalne i obrnuto

Konverzija koristi isti metod objašnjen kod binarnih brojeva, *samo je različita baza i cifre.*
Primjer: $157_{10}=?_8$

157	:	8	=	19	(5)
19	:	8	=	2	(3)
2	:	8	=	0	(2)

Rješenje $157_{10}=235_8$

Konverzija oktalnih brojeva u dekadne je jednostavna:
$2 \cdot 8^2+3 \cdot 8^1+5 \cdot 8^0 =128+24+5=157$

1.6.6.3 Konverzija binarnih brojeva u oktalne i obrnuto

Pošto je $2^3 = 8$, znaci za jedan jednocifren oktalni broj treba tri bita.
Prema tome, binarni brojevi se mogu podijeliti u grupe po tri bita,pocevši od pozicionog zareza. Svakoj takvoj grupi može se pripisati jedan oktalni broj.

Zadatak: $(10010100100011111)_2 = (\ ?\ )_8$

Rješenje podjelimo binarni zapis u grupe po tri cifre i svakoj grupi pridružimo oktalnu vrijednost:

$(10'\ 010'\ 100'\ 100'\ 011'\ 110)_2 = (224437)_8$

Analogno oktalni broj se vrlo jednostavno pretvara u binarni.
Npr. ako želimo da **Primjer:** $(471)_8 \prec (\ ?\ )_2$
Napravimo jednostavnu tabelu sa oktalnim ciframa i njima pripadajusim binarnim brojevima

	4 (2^2)	2(2^1)	1(2^0)
4	1	0	0
7	1	1	1
1	0	0	1

i na analogno predhodnom (grupisanju po tri cifre) dobiti da je:
$(471)_8 \prec (100111001)_2$

1.6.6.4 Konverzija binarnih brojeva u heksadecimalne i obrnuto

Svaki binarni broj koji treba pretvoriti u heksadecimalni dijeli u grupe po cetiri bita i svakoj grupi posebno dodjeljuje odgovarajusi haksadecimalni ekvivalent.
Razlog je ocigledan: osnova heksadecimalnog sistema 16 , što je 2^4 .
To pruža mogusnost da zapis u binarnom sistemu lakše pamtimo koristesi heksadecimalni zapis.

Primjer:
$(1011101000011111)_2 = 1011\ 1010\ 0001\ 1111$
$(\ B \quad A \quad 1 \quad F\ )_{16}$

Dugi niz binarnih cifri se grupiše po cetri i svaka grupa se konvertuje u odgovarajusu heksadecimalnu cifru, npr.:
$(11'1101'0010'0110'1010'0011)_2 = 0011\ 1101\ 0010\ 0110\ 1010\ 0011 = (3D26A3)_{16}$

Za povratak u binarni sistem, svakoj heksadecimalnoj cifri pripisuje se binarni ekvivalent sa cetiri cifre.
Primjer konverzije heksadecimalnog u binarni:

$(\ F6B2\ )_{16}$ =	F	6	B	2
	1111	0110	1011	0010 = $(1110011010110010)_2$

1.6.6.5 Konverzija decimalnih u heksadecimalne i obrnuto

Konverzija koristi isti metod objašnjen kod binarnih brojeva, *samo je različita baza i cifre.*
Primjer: $1067_{10}=?_{16}$

1067	:	16	=	66 ($11_{10}=B_{16}$)	(B)
66	:	16	=	4 ($2_{10}=2_{16}$)	(2)
4	:	16	=	0 ($4_{10}=4_{16}$)	(4)

Rješenje $1067_{10}=42B_{16}$

Obrnuta konverzija je ocigledna i jednostavna:
$4 \cdot 16^2+2 \cdot 16^1+11 \cdot 16^0 =1024+32+11=1067$