<u>Razlomljeni racionalni algebarski izrazi</u>

<u>Najveći zajednički delilac i najmanji zajednički sadržalac polinoma</u>

<u>NZD</u> polinoma P i Q je polinom D koji ima najveći stepen medju polinomima koji su delioci i polinoma P i polinoma Q.

<u>NZS</u> polinoma P i Q je polinom S koji ima najmanji stepen medju polinomima koji su deljivi i polinomom P i polinomom Q.

<u>Primer 1</u>: Nadji NZS i NZD za polinome:

$$P(x) = x^2 - 4$$
$$Q(x) = x^2 - x - 2$$
$$R(x) = x^2 - 3x + 2$$

Prvo moramo svaki od njih rastaviti na činioce (naravno , upotrebom postupka navedenog u fajlu: Transformacije algebarskih izraza).

$$P(x) = x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$$
$$Q(x) = x^2 - x - 2 = x^2 - 2x + x - 2 = x(x-2) + 1(x-2) = (x-2)(x+1)$$
$$R(x) = x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x-1) - 2(x-1) = (x-1)(x-2)$$

NZD je ustvari 'presek', odnosno 'onaj' koji ga ima u svakom od polinoma.

Ovde je to očigledno x-2. Dakle:

NZD = x-2

NZS je 'unija'. On mora biti deljiv sa sva tri polinoma. Dakle:

NZS = (x-2)(x+2)(x-1)(x+1)

<u>Primer 2</u>: Nadji NZS i NZD za polinome :

$$P = a^2 - ab$$
$$Q = a^2 - b^2$$
$$R = a^2 - 2ab + b^2$$

Najpre vršimo rastavljanje na činioce:

$P = a^2 - ab = a(a-b)$

$Q = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$R = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

NZD = $(a-b) \rightarrow$ jer ga ima u sva tri   NZS = $a(a-b)^2\,(a+b) \rightarrow$ deljiv sa sva tri

<u>Primer 3</u>: Nadji NZS i NZD za polinome:

$$A = x^2 - xy$$
$$B = xy + y^2$$

Rastavljamo na činioce:

$$\begin{aligned} A &= x(x-y) \\ B &= y(x+y) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{NZS} = xy(x-y)(x+y)$$

Šta ćemo sa NZD? Nema činioca koji se sadrži u A i B. U takvoj situaciji NZD = 1 , a za polinome kažemo da su uzajamno prosti.

<u>Primer 4:</u> Nadji NZS i NZD za polinome:

$9a + 15 =$

$36a^2 - 100 =$

$-9a^2 + 30a - 25 =$

Rešenje:

$$9a + 15 = 3(3a + 5)$$
$$36a^2 - 100 = 4(9a^2 - 25) = 4(3a - 5)(3a + 5)$$
$$-9a^2 + 30a - 25 = -(9a^2 - 30a + 25) = -(3a - 5)^2$$

NZS $= -12(3a + 5)(3a - 5)^2$

NZD = 1

<u>Primer 5:</u> Nadji NZS i NZD za polinome:

$$4a^2 + 4ab + b^2 = (2a + b)^2$$
$$4a^2 - b^2 = (2a - b)(2a + b)$$
$$8a^3 + b^3 = (2a)^3 + b^3 = (2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2)$$

NZS $= (2a+b)^2(2a-b)(4a^2 - 2ab + b^2)$

NZD = $2a+b$

<u>Primer 6:</u> Nadji NZS za polinome:

$3x^3 - 12x^2 + 12x =$

$5x^4 + 20x^3 + 20x^2 =$

$3nx^2 - 12n =$

$3x^3 - 12x^2 + 12x = 3x(x^2 - 4x + 4) = 3x(x-2)^2$

$5x^4 + 20x^3 + 20x^2 = 5x^2(x^2 + 4x + 4) = 5x^2(x+2)^2$

$3nx^2 - 12n = 3n(x^2 - 4) = 3n(x-2)(x+2)$

$\text{NZS} = 15nx^2(x-2)^2(x+2)^2$

Primer 7: **Nadji NZS i NZD za polinome:**

$2a^4 - 2 = 2(a^4 - 1) = 2(a^2 - 1)(a^2 + 1) = 2(a-1)(a+1)(a^2+1)$

$a^3 + a^2 + a + 1 = a^2(a+1) + 1(a+1) = (a+1)(a^2+1)$

$a^3 - a^2 + a + 1 = a^2(a-1) + 1(a-1) = (a-1)(a^2+1)$

$\text{NZS} = 2(a-1)(a+1)(a^2+1)$

$\text{NZD} = (a^2+1)$

Kako upotrebiti NZS?

1) Uprosti izraz:

$\frac{a}{ab-b^2} + \frac{b}{a^2 - ab} - \frac{a+b}{ab} =$ najpre treba svaki imenilac rastaviti na činioce=

$\frac{a}{b(a-b)} + \frac{b}{a(a-b)} - \frac{a+b}{ab} =$ zatim nadjemo NZS za imenioce ,to je $ab(a-b)$ i izvršimo proširenje razlomka. Kako da znamo koji sa kojim da proširimo? Gledamo imenilac i NZS, šta je "višak'',**sa tim** proširimo. Tako prvi sabirak širimo sa a , jer je "višak'' kad gledamo $ab(a-b)$ i $b(a-b)$ drugi sa b a treći sa $(a-b)$. Dakle:

$$= \frac{a \cdot a + b \cdot b - (a+b)(a-b)}{ab(a-b)} =$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)}{ab(a-b)} = \frac{a^2 + b^2 - a^2 + b^2}{ab(a-b)} = \frac{2b^2}{ab(a-b)} = \frac{2b^{\cancel{2}}}{a\cancel{b}(a-b)} = \frac{2b}{a(a-b)}$$

Pre početka (ili po završetku) rada treba postaviti **<u>uslove</u>** zadataka. Pošto deljenje nulom nije dozvoljeno to nijedan u imeniocu **<u>ne</u>** sme biti nula, tj.

$a \neq 0;\ b \neq 0;\ a - b \neq 0 \Rightarrow a \neq b$

2) Uprosti izraz: $\frac{1}{x^2 - x} + \frac{2}{1 - x^2} + \frac{1}{x^2 + x}$

$\frac{1}{x^2 - x} + \frac{2}{1 - x^2} + \frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{x(x-1)} + \frac{2}{(1-x)(1+x)} + \frac{1}{x(x+1)} =$ šta je problem?

Izrazi $(1+x)$ i $(x+1)$ nisu, jer važi komutativni zakon : ($A + B = B + A$) , ali izrazi $(x-1)$ i(1-x) jesu. Taj problem ćemo rešiti tako što jedan od ta dva izraza ''okrenemo'' i izvučemo minus ispred, jer važi da je $A - B = -(B - A)$

$$= \frac{1}{x(x-1)} \boxed{+} \frac{2}{(1-x)(1+x)} + \frac{1}{x(x+1)}$$

$$= \frac{1}{x(x-1)} - \frac{2}{(x-1)(1+x)} + \frac{1}{x(x+1)} =$$

$$= \frac{1 \cdot (x+1) - 2x + 1(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{x+1-2x+x-1}{x(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{0}{x(x-1)(x+1)} = 0$$

Naravno, uslovi zadatka su:

$x \neq 0;\ x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1;\ x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

3) Uprosti izraz:

$$\frac{a+1}{a+2} + \frac{6a}{a^2-4} - \frac{2a-1}{a-2}$$

Rešenje:

$$\frac{a+1}{a+2} + \frac{6a}{a^2-4} - \frac{2a-1}{a-2} =$$

$$\frac{a+1}{a+2} + \frac{6a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2a-1}{a-2} =$$

$$\frac{(a+1)(a-2) + 6a - (2a+1)(a+2)}{(a-2)(a+2)} =$$ **<u>Pazi na znak ispred zagrade</u>!**

$$\frac{(a^2-2a+a-2) + 6a - (2a^2+4a-a-2)}{(a-2)(a+2)} =$$

$$\frac{a^2-2a+a-2+6a-2a^2-4a+a+2}{(a-2)(a+2)} =$$

Uvek pokušaj da na kraju rastaviš i brojilac, jer možda ima nešto da se "skrati''!!! Kao sad (*a-2)*

$$\frac{-a^2+2a}{(a-2)(a+2)} = \frac{-a(a-2)}{(a-2)(a+2)} =$$

$$\frac{-a}{a+2}$$

<u>Uslovi zadatka su:</u>

$a+2 \neq 0 \Rightarrow a \neq -2$

$a-2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$