8. Definicija n-tog korena

Def. Neka je $n \in N$. *n*-ti koren realnog broja *a* je svako rešenje jednačine $x^n = a$, tj.

$$\sqrt[n]{a} = x \iff x^n = a.$$

1° Za svaki prirodan broj *n* i svaki pozitivan broj *a* postoje tačno dva realna *n*-ta korena broja *a*; to su dva suprotna realna broja.

Primer 1.

$x^4 = \frac{1}{81} \iff x = \sqrt[4]{\frac{1}{81}}$. Za ovu jednačinu imamo dva rešenja $x_1 = \frac{1}{3}$ i $x_2 = -\frac{1}{3}$, jer je $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$ i $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$.

2° Za svaki paran prirodan broj *n* i svaki negativan broj *a* ne postoji *n*-ti koren broja *a* koji je realan broj.

Primer 2.

$\sqrt{-16}$ ne postoji u skupu realnih brojeva!

3° Za svaki neparan prirodan broj *n* i svaki pozitivan broj *a* postoji jedinstven *n*-ti koren broja *a*; taj *n*-ti koren je pozitivan broj.

Primer 3.

$x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ jer je $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

4° Za svaki neparan prirodan broj *n* i svaki negativan broj *a* postoji jedinstven *n*-ti koren broja *a*; taj *n*-ti koren je negativan broj.

Primer 4.

$\sqrt[5]{-32} = -2$ jer je $(-2)^5 = -32$

5° Za svaki prirodan proj *n* postoji jedinstven *n*-ti koren broja 0; to je 0.

Iako smo *n*-ti koren definisali preko jednačine *n*-tog stepena, samo izračunavanje $\sqrt[n]{a^n}$ nije isto kao i rešavanje jednačine $x^n = a$, tj. $\sqrt[4]{16} = 2$ dok je skup rešenja jednačine $x^4 = 16$ u skupu realnih brojeva skup {-2, 2}. Zbog toga uvodimo definiciju:

Def. *n*-ti koren nenegativnog broja *a* je takav nenegativan broj *x* čiji je *n*-ti stepen jednak broju *a*.

Važi: $$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & , n - \text{neparan} \\ |a| & , n - \text{paran} \end{cases}$$

Primer 4.

a) $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ tj. $x_1 = -2 \wedge x_2 = 2$ jer je i $(-2)^2 = 4$ i $2^2 = 4$,

b) $\sqrt{4} = |2| = 2$,

c) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$,

d) $\sqrt[6]{(-12)^6} = |-12| = 12$,

e) $\sqrt[3]{-5} = -5$.