40. Jednačine koje se svode na kvadratne

ZADATAK 1. Rešiti jednačinu $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0$.

Rešenje:

Primećujemo da su prvi i drugi razlomak jedan drugome inverzni, s tom razlikom što drugomo razlomku treba „skinuti“ trojku. To se lako postiže i dobijamo sledeću jednačinu:

$$\frac{x^2+x-5}{x}+3\cdot\frac{x}{x^2+x-5}+4=0.$$

Ako sada uvedemo smenu $\frac{x^2+x-5}{x}=t$ dobijamo

$$t+3\cdot\frac{1}{t}+4=0.$$

Saberimo sve u jedan razlomak:

$$\frac{t^2+3+4t}{t}=0.$$

Ako je razlomak jednak nuli, to znači da je brojilac jednak nuli, tj.

$$t^2+4t+3=0$$

$$t_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}$$

$$t_1=-3\wedge t_2=-1.$$

Ako vratimo smenu za svaku vrednost t dobićemo sledeća rešenja:

1^o $$\frac{x^2+x-5}{x}=-3$$

$$\frac{x^2+x-5}{x}+3=0$$

$$\frac{x^2+x-5+3x}{x}=0$$

$$x^2+4x-5=0$$

$$x_1=-5\wedge x_2=1;$$

2^{o} $\quad \frac{x^2+x-5}{x}=-1$

$$\frac{x^2+x-5}{x}+1=0$$

$$\frac{x^2+x-5+x}{x}=0$$

$$x^2+2x-5=0$$

$$x_3=-1-\sqrt{6} \wedge x_4=-1+\sqrt{6}\,.$$

Dakle skup rešenja naše jednačine je: $\{-5, 1, -1-\sqrt{6}, -1+\sqrt{6}\}$.

Binomna jednačina:

- Oblik: $Ax^n \pm B = 0$,
- Smena: $x = y\sqrt[n]{\frac{B}{A}}$,
- Svodi se na oblik: $y^n \pm 1 = 0$.

ZADATAK 2. Reši jednačinu $8x^3-27=0$.

Rešenje:

$$8x^3-27=0$$

Smena $x=\frac{3}{2}y$

$$8\cdot\left(\frac{3}{2}y\right)^3-27=0$$

$$27y^3-27=0$$

$$27(y^3-1)=0$$

$$y^3-1=0$$

$$(y-1)(y^2+y+1)=0$$

$$y-1=0 \vee y^2+y+1=0$$

$$y_1 = 1 \wedge y_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \wedge y_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Sada vraćamo smenu za sve dobijene vrednosti *y*.

1^{o} $\quad x_1 = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$

2^{o} $\quad x_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\frac{3(1 + i\sqrt{3})}{4}$

3^{o} $\quad x_3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\frac{3(1 - i\sqrt{3})}{4}$

Trinomne jednačine

- Oblik: $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ što transformišemo u oblik $a\left(x^n\right)^2 + bx^n + c = 0$,
- Smena: $x^n = t$,
- Svodi se na oblik: $at^2 + bt + c = 0$.

ZADATAK 3. Reši jednačinu $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$.

Rešenje:

$$x^6 - 7x^3 - 8 = 0$$

$$\left(x^3\right)^2 - 7x^3 - 8 = 0$$

Uvodimo smenu: $x^3 = t$

$$t^2 - 7t - 8 = 0$$

$$t_1 = 8 \wedge t_2 = -1 .$$

Opet, smenu vraćamo za sve dobijene vrednosti promenljive *t*, tj.

1^{o} $\quad x^3 = 8$

$$x^3 - 8 = 0$$

$$(x - 2)\left(x^2 + 2x + 4\right) = 0$$

$$x - 2 = 0 \vee x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$x_1 = 2 \wedge x_2 = -1 - i\sqrt{3} \wedge x_3 = -1 + i\sqrt{3} .$$

2^{o} $x^3 = -1$

$x^3 + 1 = 0$

$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$

$x + 1 = 0 \vee x^2 - x + 1 = 0$

$x_4 = -1 \wedge x_5 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \wedge x_6 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.