41. Jednačine koje se svode na kvadratne

Simetrične (recipročne) jednačine

Jednačine oblika

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + cx^2 + bx + a = 0$$

nazivamo *simetrične jednačine*, zbog simetričnosti koeficijenata (koeficijenti uz x^k i x^{n-k} su jednaki).

Primer 1. Primeri simetričnih jednačina su:

- $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ je jedna simetrična jednačina. Element $-x^2$ je središnji element i on je simetričan samome sebi; njegovi susedni elementi polinoma su $-2x^3$ i $-2x$ i njihovi koeficijenti su jednaki (oba koeficijenta su -2), pa kažemo simetrični; rubni elementi polinoma su x^4 i 1 i njihovi koeficijenti su jednaki (oba koeficijenta su 1), pa kažemo da su simetrični. Zbog tih parova jednakih koeficijenata kažemo da je jednačina simetrična. Ova simetrična jednačina je parnog stepena jer joj je najveći stepen paran broj, a kao što vidimo ima neparan broj elemenata u polinomu (ima jedan centralni element i parove simetričnih elemenata).

- $x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$ je takođe simetrična jednačina. Ona nema centralni element nego centralni par sa simetričnim koeficijentima (x^3 i x^2; oba koeficijenta su 1). Oko njih se šire parovi elemenata sa jednakim koeficijentima – par $-2x^4$ i $-2x$ i par x^5 i 1. Ova simetrična jednačina je neparnog stepena jer joj je najveći stepen neparan broj i kao što vidimo ima paran broj elemenata u polinomu.

Simetrične jednačine zovemo još i recipročne zbog osobine da ako imaju rešenje

$$x = \alpha ,$$

onda imaju i rešenje

$$x = \frac{1}{\alpha} .$$

Postupak rešavanja:

Neka je data jednačina:

$$x^7 + 4x^6 + 2x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 0$$

1^o Ako je jednačina neparnog stepena onda ona ima paran broj elemenata, svi parovi imaju jednake koeficijente, ali su u svakom paru stepeni elementa različite parnosti (npr. $5x^4$ i $5x^3$: 4 je paran, a 3 je neparan broj; $4x^6$ i $4x$: 6 je paran, a 1 neparan broj ...) i zato ako u polinom uvrstimo broj -1 dobićemo da je zbir 0,

$$(-1)^7 + 4\cdot(-1)^6 + 2\cdot(-1)^5 + 5\cdot(-1)^4 + 5\cdot(-1)^3 + 2\cdot(-1)^2 + 4\cdot(-1) + 1 =$$

$$= -1 + 4 - 2 + 5 - 5 + 2 - 4 + 1 = 0\,,$$

odnosno, **jedno rešenje je *x* = - 1**.

2^o Podelimo polinom lineranim polinomom (x + 1). Ostatka neće biti jer je – 1 nula polinoma. Količnik deljenja je simetrična jednačina parnog stepena.

$$\left(x^7 + 4x^6 + 2x^5 + 5x^4 + 5x^3 + +2x^2 + 4x + 1\right) : \left(x+1\right) = x^6 + 3x^5 - x^4 + 6x^3 - x^2 + 3x + 1$$

3^o Sada simetrična jednačina ima središnji element i njime podelimo celu jednačinu.

$$x^6 + 3x^5 - x^4 + 6x^3 - x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$x^3 + 3x^2 - x + 6 - \frac{1}{x} + 3\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0$$

4^o Grupišemo elemente sa jednakim koeficijentima (koeficijente „izvučemo ispred zagrade“)

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$$

5^o Uvodimo smenu:

$$t = x + \frac{1}{x}\,.$$

Za druge dve zagrade smenu moramo posebno izračunati (transformisati):

- ako celu jednačinu kvadriramo (kvadriramo celu desnu i celu levu stranu) dobijamo sledeće:

$$t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

$$t^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2},$$

što će biti smena za drugu zagradu.

- ako celu jednačinu stepenujemo na treći stepen dobijamo:

$$t^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3$$

$$t^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

$$t^3 = x^3 + 3x + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$$

$$t^3 = x^3 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3}$$

$$t^3 = x^3 + 3t + \frac{1}{x^3}$$

$$t^3 - 3t = x^3 + \frac{1}{x^3}$$

što će biti smena u prvoj zagradi.

6^{o} Jednačina sada dobija oblik

$$\left(t^3 - 3t\right) + 3\left(t^2 - 2\right) - t + 6 = 0$$

$$t^3 + 3t^2 - 4t = 0$$

7° Rešimo polinom trećeg stepena (pogledati: prvi razred srednje škole; nastavna oblast: Polinomi; nastavna jedinica: rešavanje polinoma trećeg stepena) i dobijemo rešenja:

$$t_1 = 0 \wedge t_2 = -4 \wedge t_3 = 1.$$

8° Vratimo smenu za svaku dobijenu vrednost promenljive *t*:

$$0 = x + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 + 1 = 0$$

$$x_1 = -i \wedge x_2 = i\,;$$

$$-4 = x + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 + 1 = -4x$$

$$x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x_3 = -2 - \sqrt{3} \wedge x_4 = -2 + \sqrt{3}\,;$$

$$1 = x + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 + 1 = x$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$x_5 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \wedge x_6 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\,;$$

$x_7 = -1$ je rešenje koje smo dobili u koraku 1° i to je rešenje svake simetrične jednačine neparnog stepena.

NAPOMENA. Ako treba da rešimo simetričnu jednačinu parnog stepena, počinjemo od koraka 3°

Kososimetrične jednačine

Jednačine oblika

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots - cx^2 - bx - a = 0$$

nazivamo *kososimetrične jednačine*, zbog simetričnosti apsolutnih vrednosti koeficijenata koji su međusobno suprotnih predznaka (koeficijenti uz x^{n-2} i x^2 (c i $-c$ respektivno) su jednakih apsolutnih vrednosti ali suprotnih predznaka).

Postupak rešavanja je sličan prethodnom zadatku, s tim što je jedno rešenje kososimetričnih jednačina uvek $x = 1$. Ako polinom kososimetrične jednačine podelimo sa

$(x-1)$ dobićemo simetričnu jednačinu parnog stepena i postupci rešavanja se od ovog koraka poklapaju.

Kod kososimetrične jednačine koeficijent centralnog elementa mora biti 0! Zašto?

Ako postoji centralni element onda je on sam sebi simetričan i ne može biti sam sebi kososimetričan jer ni jedan broj (različit od nule) ne može biti istovremeno i pozitivan i negativan. Zato kososimetrične jednačine parnog stepena nemaju centralni element (koeficijent im je jednak 0) i one se rešavaju faktorisanjem.

ZADATAK 1. Rešiti jednačinu $12x^4-25x^3+25x-12=0$

Rešenje:

$$12x^4-25x^3+25x-12=0$$

$$12\left(x^4-1\right)-25\left(x^3-x\right)=0$$

$$12\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)-25x\left(x^2-1\right)=0\,.$$

$$\left(x^2-1\right)\left(12x^2+12-25x\right)=0$$

$$x^2-1=0 \vee 12x^2-25x+12=0$$

$$x_1=-1 \wedge x_2=1 \wedge x_3=\frac{3}{2} \wedge x_4=\frac{8}{3}$$