25. Operacije sa kompleksnim brojevima

ZADATAK 1. Izračunaj:

a) $(1+i)^{10}$,

b) $(1-i)^{6}$,

c) $(1+i)^{9}$,

d) $(1-i)^{13}$

Rešenje:

a) $(1+i)^{10}=\left((1+i)^2\right)^5=\left(1+2i+i^2\right)^5=\left(1+2i-1\right)^5=\left(2i\right)^5=32i^5=32i$,

b) $(1-i)^{6}=\left((1-i)^2\right)^3=\left(1-2i+i^2\right)^3=\left(1-2i-1\right)^3=\left(-2i\right)^3=-8i^3=(-8)\cdot(-i)=8i$,

c) $(1+i)^{9}=(1+i)^8\cdot(1+i)=\left((1+i)^2\right)^4\cdot(1+i)=(2i)^4\cdot(1+i)=16i^4\cdot(1+i)=16+16i$,

d) $(1-i)^{13}=(1-i)^{12}\cdot(1-i)=\left((1-i)^2\right)^6\cdot(1-i)=(-2i)^6\cdot(1-i)=64i^6\cdot(1-i)=$

$=64\cdot(-1)\cdot(1-i)=-64+64i$.

ZADATAK 2. Ako su dati kompleksni brojevi $z_1=1-i$ i $z_2=3+4i$ izračunaj vrednost izraza $W=\dfrac{(1-i)^5+2\overline{z}_2}{z_1\cdot z_2+5i^{46}}$.

Rešenje:

$$W=\frac{(1-i)^5+2\overline{z}_2}{z_1\cdot z_2+5i^{46}}=\frac{\left((1-i)^2\right)^2\cdot(1-i)+2\cdot(3-4i)}{(1-i)(3+4i)+5\cdot i^{4\cdot 11+2}}=\frac{(-2i)^2\cdot(1-i)+6-8i}{3+4i-3i-4i^2+5\cdot(-1)}=$$

$$=\frac{4i^2\cdot(1-i)+6-8i}{3+i-4\cdot(-1)-5}=\frac{-4+4i+6-8i}{2+i}=\frac{2-4i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}=\frac{4-2i-8i+4i^2}{4-i^2}=\frac{4-10i+4\cdot(-1)}{4-(-1)}=$$

$$=\frac{-10i}{5}=-2i.$$

6^{o} Dva kompleksna broja su jednaka ako su im jednaki realni i imaginarni delovi tj.

$$z_1=z_2\Leftrightarrow(\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)\wedge\mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)).$$

ZADATAK 2. Odredi x i y tako da važi $x-1+i(y-3)=4+2i$.

Rešenje:

$$x-1+i(y-3)=4+2i \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \mathrm{Re}(x-1+i(y-3)=\mathrm{Re}(4+2i) \\ \mathrm{Im}(x-1+i(y-3)=\mathrm{Im}(4+2i) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x-1=4 \\ y-3=2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x=5 \\ y=5. \end{array}$$

ZADATAK 3. Rešiti po z jednačinu:

a) $z+2\overline{z}=6-i$,

b) $\overline{z}+4z=20+18i$.

Rešenje:

a) Neka je $z=x+iy$. Zamenimo z iz jednačine datim izrazom. Sada dobijamo:

$$z+2\overline{z}=6-i$$

$$(x+iy)+2(x-iy)=6-i$$

$$x+iy+2x-2iy=6-i$$

$$3x-iy=6-i.$$

Ako sada izjednačimo realne i imaginarne delove dobijamo:

$$3x=6 \wedge -y=-1,$$

tj.

$$x=2 \wedge y=1.$$

Zbog, gore postavljenog, $z=x+iy$ traženo rešenje je $z=2+i$.

b) Neka je ponovo $z=x+iy$. Zaamenom u jednačinu dobijamo:

$$\overline{z}+4z=20+18i$$

$$(x-iy)+4\cdot(x+iy)=20+18i$$

$$x - iy + 4x + 4iy = 20 + 18i$$

$$5x + 3iy = 20 + 18i\,.$$

Izjednačujući realne i imaginarne komponente kompleksnog broja dobijamo:

$$5x = 20 \wedge 3y = 18\,,$$

tj.

$$x = 4 \wedge y = 6\,.$$

Na osnovu dobijenog sledi da je rešenje $z = 4 + 6i$.

DOMAĆI ZADATAK:

Vene T. Bogoslavov 2 – 389, 393.