12. Operacije sa korenima – vežbe

ZADATAK 1. Odrediti vrednost izraza $A=\sqrt{(x-5)^2}+\sqrt{(x+5)^2}, x\in R$ i rešenje grafički prikazati u ravni *xOA*.

Rešenje:

Iz definicije kvadratnog korena znamo da je $\sqrt{a^2}=|a|$ i zato je

$$A=\sqrt{(x-5)^2}+\sqrt{(x+5)^2}=|x-5|+|x+5|.$$

Apsolutnu vrednost definišemo na sledeći način:

$$|x|=\begin{cases} x & ,x\geq 0 \\ -x & ,x<0 \end{cases}.$$

Zbog toga u našem slučaju je

$$|x-5|=\begin{cases} x-5 & ,x-5\geq 0 \\ -(x-5) & ,x-5<0 \end{cases},$$

odnosno

$$|x-5|=\begin{cases} x-5 & ,x\geq 5 \\ -(x-5) & ,x<5 \end{cases} \qquad (1)$$

i

$$|x+5|=\begin{cases} x+5 & ,x+5\geq 0 \\ -(x+5) & ,x+5<0 \end{cases},$$

odnosno

$$|x+5|=\begin{cases} x+5 & ,x\geq -5 \\ -(x+5) & ,x<-5 \end{cases}. \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) vidimo da imamo tri oblasti u kojima dobijamo tri različita izraza za *A*. Te oblasti i izrazi su:

- $x<-5$ (ova oblast uključuje i $x<5$ iz (1) i $x<-5$ iz (2)) i u njoj je vrednost izraza *A*

  $$A=-(x-5)-(x+5)=-2x,$$

- $-5 \le x < 5$ (ova oblast uključuje $x < 5$ iz (1) i $x \ge -5$ iz (2)) i u njoj je vrednost izraza A

  $$A = -(x-5) + (x+5) = 10,$$

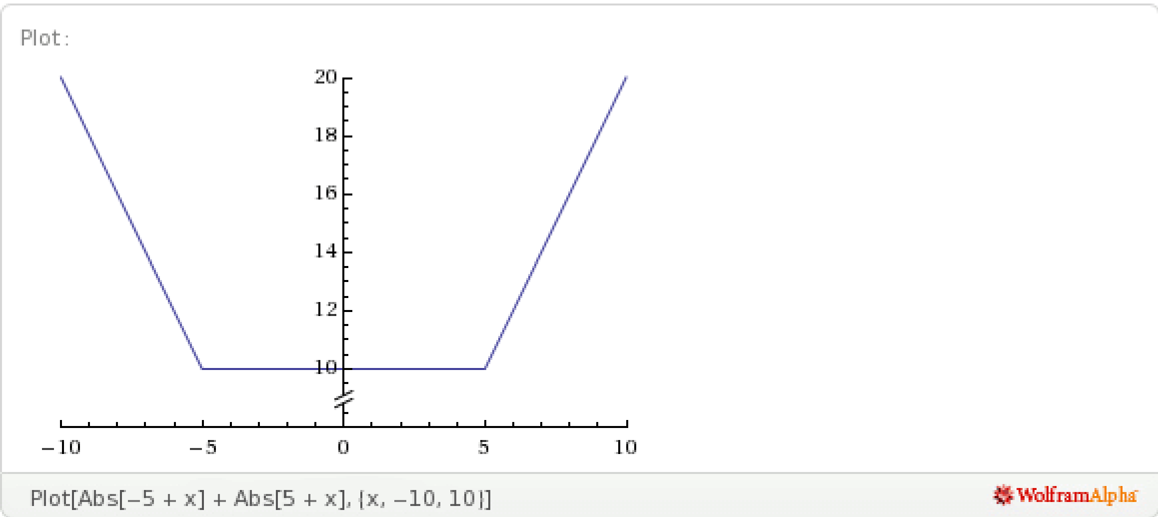
- $5 \le x$ (ova oblast uključuje $x \ge 5$ iz (1) i $x \ge -5$ iz (2)) te je u njoj vrednost izraza A

  $$A = (x-5) + (x+5) = 2x.$$

Ovo sve možemo prikazati samo jednim izrazom:

$$A = \begin{cases} -2x & , \quad x < -5 \\ 10 & , -5 \le x < 5 \\ 2x & , \quad 5 \le x \end{cases}$$

a grafik je dat na slici 1.



Slika 1.

ZADATAK 2. Primenom definicije korena $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ pod uslovom da postoji, izračunaj:

a) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$

b) $(5 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{3})$

c) $(2\sqrt{5} + \sqrt{19})(2\sqrt{5} - \sqrt{19})$

d) $(3\sqrt{6} - 2\sqrt{16})(2\sqrt{16} + 3\sqrt{6})$

Rešenje:

a) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2=5-3=2,$

b) $(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})=5^2-(\sqrt{3})^2=25-3=21,$

c) $(2\sqrt{5}+\sqrt{19})(2\sqrt{5}-\sqrt{19})=(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{19})^2=4\cdot 5-19=1,$

d) $(3\sqrt{6}-2\sqrt{16})(2\sqrt{16}+3\sqrt{6})=(3\sqrt{6}-2\sqrt{16})(3\sqrt{6}+2\sqrt{16})=(3\sqrt{6})^2-(2\cdot 4)^2=$

$=9\cdot 6-64=-10.$

ZADATAK 3. Dati su izrazi A i B. Dokaži da oni imaju iste vrednosti:

$$A=\sqrt{1-\frac{2a-1}{a^2}}\ \text{ i }\ B=\sqrt{9+\frac{(a-1-3a)(a-1+3a)}{a^2}}\,.$$

Rešenje:

$$A=\sqrt{1-\frac{2a-1}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2-(2a-1)}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2-2a+1}{a^2}}=\sqrt{\frac{(a-1)^2}{a^2}}=\sqrt{\left(\frac{a-1}{a}\right)^2}=\frac{a-1}{a},$$

$$B=\sqrt{9+\frac{(a-1-3a)(a-1+3a)}{a^2}}=\sqrt{\frac{9a^2+(a-1)^2-(3a)^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{9a^2+(a-1)^2-9a^2}{a^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(a-1)^2}{a^2}}=\sqrt{\left(\frac{a-1}{a}\right)^2}=\frac{a-1}{a}\,.$$