20. Pojam imaginarnog broja i operacije

$$\sqrt{-1} \overset{def}{=} i$$

Primer 1.

a) $\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3i$,

b) $\sqrt{-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot (-1)} = \sqrt{\frac{4}{9}} \cdot \sqrt{-1} = \frac{2}{3} i$,

c) $\sqrt{-5} = \sqrt{(-1) \cdot 5} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{5} = i\sqrt{5}$.

ZADATAK 1. Izračunati:

a) $\sqrt{-36} - \sqrt{-16} - \sqrt{-64} + \sqrt{-49}$,

b) $\sqrt{-18} - \sqrt{-50} + \sqrt{-72} - \sqrt{-98}$,

c) $\sqrt{-a^2} - \sqrt{-a^2 + 2ab - b^2} + \sqrt{-b^2}$.

Rešenje:

a) $\sqrt{-36} - \sqrt{-16} - \sqrt{-64} + \sqrt{-49} = 6i - 4i - 8i + 7i = -11i$,

b) $\sqrt{-18} - \sqrt{-50} + \sqrt{-72} - \sqrt{-98} = 3i\sqrt{2} - 5i\sqrt{2} + 6i\sqrt{2} - 7i\sqrt{2} = -3i\sqrt{2}$,

c) $\sqrt{-a^2} - \sqrt{-a^2 + 2ab - b^2} + \sqrt{-b^2} = ai - i(a - b) + bi = 2bi$.

Iz definicije $\sqrt{-1} \overset{def}{=} i$ imamo sledeće jednakosti:

$i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$ tj. $i^2 = -1$;

$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{-1} = -i$ tj. $i^3 = -i$;

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$ tj. $i^4 = 1$;

$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$ tj. ista vrednost kao i za i^1 ;

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$ tj. ista vrednost kao i za i^2 ;

$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$ tj. ista vrednost kao i za i^3 ;

$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$ tj. ista vrednost kao i za i^4 ;

$i^9 = i^4 \cdot i^4 \cdot i = 1 \cdot 1 \cdot i = i$ tj. ista vrednost kao i za i^1 ;

...

Iz prethodnog vidimo da su vrednosti različite do 4-og stepena, a nakon toga se ponavljaju periodično na svaka 4 stepena više, odnosno:

$i^{4k} = 1$ - imaginarna jedinica stepenovana stepenom deljivim sa brojem 4 ima vrednost 1;

$i^{4k+1} = i$ - imaginarna jedinica stepenovana stepenom deljivim sa brojem 4 ima vrednost *i*;

$i^{4k+2} = -1$ - imaginarna jedinica stepenovana stepenom deljivim sa brojem 4 ima vrednost -1;

$i^{4k+3} = -i$ - imaginarna jedinica stepenovana stepenom deljivim sa brojem 4 ima vrednost -*i*;

Primer 2.

a) $i^{51} = i^{4 \cdot 12+3} = i^{4 \cdot 12} \cdot i^3 = (i^4)^{12} \cdot i^3 = 1^{12} \cdot (-i) = -i$;

b) $i^{4445} = i^{4 \cdot 1111+1} = i^{4 \cdot 1111} \cdot i = (i^4)^{1111} \cdot i = 1^{1111} \cdot i = i$

Kompleksni brojevi su izrazi oblika $a + ib$ gde su *a* i *b* realni brojevi, a *i* je imaginarna jedinica.

Za kompleksan broj $z = a + ib$ njegov realan deo je $a = \mathrm{Re}(z)$, a njegov imaginaran deo je $b = \mathrm{Im}(z)$.

ZADATAK 2. Napiši realan i imaginaran deo kompleksnog broja:

a) $z = 5 + 4i$,

b) $z = -1 + i$,

c) $z = \frac{2}{3} - i\sqrt{3}$,

d) $z = 17$,

e) $z = 9i$,

f) $z = 0$.

Rešenje:

a) $\mathrm{Re}(z) = 5, \quad \mathrm{Im}(z) = 4$,

b) $\mathrm{Re}(z) = -1, \quad \mathrm{Im}(z) = 1$, *c)* $\operatorname{Re}(z)=\frac{2}{3}, \quad \operatorname{Im}(z)=-\sqrt{3}$,

d) $\operatorname{Re}(z)=17, \quad \operatorname{Im}(z)=0$,

e) $\operatorname{Re}(z)=0, \quad \operatorname{Im}(z)=9$,

f) $\operatorname{Re}(z)=0, \quad \operatorname{Im}(z)=0$.

DOMAĆI ZADATAK 1. Izračunaj:

a) $i^2+i^3+i^4$,

b) $i^5+i^{-4}+i^{121}$,

c) $i^{-5}+i^{-17}+i^{36}$,

d) $i^{125}+(-i)^{60}+i^{83}$.