33. Priroda rešenja kvadratih jednačina

Diskriminanta $D = b^2 - 4ac$.

<u>Teorema</u>: Za kvadratnu jednačinu $ax^2 + bx + c = 0$ važi:

- Jednačina ima dva različita, realna rešenja ako i samo ako je $D = b^2 - 4ac > 0$
- Jednačina ima dvostruko realno rešenje ako i samo ako je $D = b^2 - 4ac = 0$
- Jednačina ima konjugovano kompleksna rešenja ako i samo ako je $D = b^2 - 4ac < 0$

ZADATAK 1. Ne rešavajući kvadratnu jednačinu odredi kakva su njena rešenja:

a) $3x^2 - 10x + 3 = 0$
b) $x^2 + 12x - 13 = 0$
c) $x^2 - 6x + 9 = 0$
d) $x^2 - x + 1 = 0$

Rešenje:

a) $D = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 100 - 36 = 64 > 0$, znači kvadratna jednačina ima dva realna različita rešenja ($x_1 = 1 \wedge x_2 = 9$);

b) $D = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-13) = 144 + 52 = 196 > 0$, pa zaključujemo da kvadratna jednačina ima dva realna različita rešenja ($x_1 = -13 \wedge x_2 = 1$);

c) $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$, iz čega sledi da jednačina ima jedno dvostruko rešenje ($x_1 = 3 \wedge x_2 = 3$);

d) $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$, iz čega sledi da jednačina ima konjugovano kompleksna rešenja ($x_1 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$).

Podsećanje: U jednačinama često srećemo promenljive koje nisu nepoznate, tj. jednačinu rešavamo pozadatoj nepoznatoj a ostala slova su brojevi iz nekog skupa ili opšti brojevi. Takva promenljiva je parametar.

Primer 1. U jednačini $(a-1)(a+2)x = (a-1)(a-3)$ x je nepoznata promenljiva, a a je parametar. Ova jednačina ima sledeća rešenja u zavisnosti od parametra a:

- Ako je $a = 1$, kada tu vrednost uvrstimo u jednačinu, ona ima oblik $0 = 0$ pa je rešenje svako $x \in R$;
- Ako je $a = -2$ jednačina dobija oblik $0 = 15$ te zbog toga rešenje ne postoji;
- Ako je $a \neq 1, a \neq -2$ rešenje jednačine je $x = \frac{a-3}{a+2}$.

ZADATAK 2. Ispitaj prirodu rešenja kvadratne jednačine $x^2 + 3x + m = 0$ u zavisnosti od parametra *m*.
Rešenje:

$$a = 1, b = 3, c = m$$
$$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 9 - 4m$$

Ako hoćemo da nam rešenja budu realna i različita, tada diskriminanta mora biti veća od nule i zbog toga mora biti $m < \frac{9}{4}$ tj.

$$D > 0$$
$$9 - 4m > 0$$
$$m < \frac{9}{4}.$$

Slično, ako hoćemo konjugovano kompleksna rešenja mora biti $m > \frac{9}{4}$, što sledi iz $D < 0$, a ako hoćemo realna dvostruka rešenja, diskriminanta mora biti jednaka nuli, što daje rešenje $m = \frac{9}{4}$.

ZADATAK 3. Ispitaj prirodu rešenja kvadratne jednačine $(n+3)x^2 - 2(n+1)x + n - 5 = 0$ u zavisnosti od parametra *n*.
Rešenje:

$$a = n + 3, b = -2(n+1), c = n - 5$$
$$D = b^2 - 4ac = [-2(n+1)]^2 - 4(n+3)(n-5) = 4(n^2 + 2n + 1) - 4(n^2 - 2n - 15) =$$
$$= 4n^2 + 8n + 4 - 4n^2 - 8n + 60 = 16n + 64$$

1) $D > 0$ $\quad 16n + 64 > 0$
$$16n > -64$$
$$n > -\frac{64}{16}$$
$$n > -4,$$

2) $D = 0$ $\quad 16n + 64 = 0$
$$n = -4,$$

3) $D < 0$ $\quad 16n + 64 < 0$
$$n < -4.$$

DOMAĆI ZADATAK: Za koje vrednosti realnog parametra *m* su rešenja kvadratne jednačine $(m+2)x^2 + 4x - 1 = 0$ realna i jednaka?