2. Stepen čiji je izložilac prirodan broj

Iz prethodnih razreda znamo da je $a^1 = a$.

Stepenovanje realnog broja *a* prirodnim brojem *n* je proizvod *n* činilaca čija je vrednost jednaka *a*, tj.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n\ \ puta}.$$

Broj *a* zovemo baza ili osnova, a broj *n* zovemo eksponent ili izložioc.

Definišemo $a^0 = 1$.

Primer 1.

a) $3^0 = 1$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$

c) $-\frac{10^0}{5} + 2x^0 = -\frac{1}{5} + 2 \cdot 1 = \frac{9}{5}$.

Stepenovanje negativnog broja parnim izložiocem daje pozitivan broj, a neparnim izložiocem daje negativan broj, tj.

$$(-a)^{paran} = a^{paran}$$
$$(-a)^{neparan} = -a^{neparan}$$
$$(-a)^{paran} \neq -a^{paran}.$$

Primer 2.

a) $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$

b) $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$

c) $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$.

Važe sledeća svojstva:

1^o $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Primer 3.

a) $3^4 \cdot 3^3 = 3^{4+3} = 3^7$

b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right)^7$

c) $5^5 \cdot (-5)^6 = 5^5 \cdot 5^6 = 5^{11}$.

2^o $\quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Primer 4.

a) $(5^7)^3 = 5^{21}$

b) $[(-10)^2]^3 = (-10)^6 = 10^6$

c) $(x^2)^5 = x^{10} = (x^5)^2$.

3^o $\quad a^m : a^n = a^{m-n}$

Primer 5.

a) $3^5 : 3^3 = 3^2$

b) $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^4\right] : \left(-\frac{2}{5}\right)^5 = \left(-\frac{2}{5}\right)^7 : \left(-\frac{2}{5}\right)^5 = \left(-\frac{2}{5}\right)^2$

c) $\frac{8^{15} : 8^7}{8^5} = \frac{8^8}{8^5} = 8^3$.

4^o $\quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

5^o $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Primer 6.

a) $a^5 \cdot b^5 \cdot c^5 = (abc)^5$

b) $4^7 \cdot 0{,}25^7 = (4 \cdot 0{,}25)^7 = 1^7 = 1$

c) $\left(\frac{12}{35}\right)^2 : \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \left(\frac{12}{35} : \frac{6}{7}\right)^2 = \left(\frac{12}{35} \cdot \frac{7}{6}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$.

ZADATAK 1. Uprosti izraz $\frac{(a^2b^3)^2}{ab^4} \cdot \frac{a^3 \cdot b}{(a^2b^4)^3}$.

Rešenje:

$$\frac{(a^2b^3)^2}{ab^4} \cdot \frac{a^3 \cdot b}{(a^2b^4)^3} = \frac{a^4 \cdot b^6}{ab^4} \cdot \frac{a^3 \cdot b}{a^6 \cdot b^{12}} = a^3 \cdot b^2 \cdot \frac{1}{a^3 \cdot b^{11}} = \frac{1}{b^9}.$$

ZADATAK 2. Uprosti izraz $\frac{(x^3)^2 \cdot x^4 : (x^2)^2}{x^6 : (x^4 : x^2)^2}$.

Rešenje:

$$\frac{(x^3)^2 \cdot x^4 : (x^2)^2}{x^6 : (x^4 : x^2)^2} = \frac{x^6 \cdot x^4 : x^4}{x^6 : (x^8 : x^4)} = \frac{x^{6+4-4}}{x^{6-(8-4)}} = x^{6-2} = x^4.$$

ZADATAK 3. Izračunaj vrednost izraza

a) $(2^2)^2 + (3^2)^2 - 5^2$

b) $5^2 - (2^3)^2 - (2^2)^2$

c) $(2^3)^3 - (-3^2)^2 + 5^2$

d) $(3^2)^2 - (-2^2)^3 - 5^2$.

Rešenje:

a) $(2^2)^2 + (3^2)^2 - 5^2 = 2^4 + 3^4 - 5^2 = 16 + 81 - 25 = 72$

b) $5^2 - (2^3)^2 - (2^2)^2 = 5^2 - 2^6 - 2^4 = 25 - 64 - 16 = -55$

c) $(2^3)^3 - (-3^2)^2 + 5^2 = 2^9 - 3^4 + 5^2 = 512 - 81 + 25 = 456$

d) $(3^2)^2 - (-2^2)^3 - 5^2 = 3^4 - (-2^6) - 5^2 = 81 - (-64) - 25 = 120$.

ZADATAK 4. Izračunaj

a) $\frac{2^6 : 4^2}{2^2}$

b) $\frac{3^7 \cdot 9^3}{27^3}$

c) $\frac{16^4 \cdot 2^{16}}{4^{16}}$.

Rešenje:

a) $\frac{2^6:4^2}{2^2}=\frac{2^6:(2^2)^2}{2^2}=\frac{2^6:2^4}{2^2}=\frac{2^{6-4}}{2^2}=2^{2-2}=2^0=1$

b) $\frac{3^7\cdot 9^3}{27^3}=\frac{3^7\cdot(3^2)^3}{(3^3)^3}=3^{7+6-9}=3^4=81$

c) $\frac{16^4\cdot 2^{16}}{4^{16}}=\frac{(2^4)^4\cdot 2^{16}}{(2^2)^{16}}=2^{16+16-32}=2^0=1.$

ZADATAK 5. Uprosti izraz $\frac{8^{2n+1}}{2^{6n+1}}$.

Rešenje:

$$\frac{8^{2n+1}}{2^{6n+1}}=\frac{(2^3)^{2n+1}}{2^{6n+1}}=\frac{2^{3\cdot(2n+1)}}{2^{6n+1}}=\frac{2^{6n+3}}{2^{6n+1}}=2^{6n+3-(6n+1)}=2^{6n+3-6n-1}=2^2=4.$$

ZADATAK 6. Koji od sledećih izraza je za $x, y\neq 0$ jednak $3x^2y^3$:

a) $(3x^2y^3)^3:3x^2y^3$

b) $(3x^3y^3)^2:3x^4y^3$

c) $(3x^3y^2)^2:9xy^2$

d) $(9xy^2)^2\cdot x^2y^2$.

Rešenje:

a) $(3x^2y^3)^3:3x^2y^3=3^3x^6y^9:3x^2y^3=3^{3-1}x^{6-2}y^{9-3}=3^2x^4y^6=(3x^2y^3)^2$

b) $(3x^3y^3)^2:3x^4y^3=3^2x^6y^6:3x^4y^3=3^{2-1}x^{6-4}y^{6-3}=3x^2y^3$

c) $(3x^3y^2)^2:9xy^2=3^2x^6y^4:3^2xy^2=3^{2-2}x^{6-1}y^{4-2}=3^0x^5y^2=x^5y^2$

d) $(9xy^2)^2\cdot x^2y^2=(3^2)^2x^2y^4\cdot x^2y^2=3^4x^{2+2}y^{4+2}=81x^4y^6$.

ZADATAK 7. Šta je veće 200^{300} ili 300^{200}?

Rešenje:

a) $\frac{200^{300}}{300^{200}}=\frac{200^{200+100}}{300^{200}}=\frac{200^{200}\cdot 200^{100}}{300^{200}}=\left(\frac{200}{300}\right)^{200}\cdot 200^{100}=$

$$=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{100}\cdot 200^{100}=\left(\frac{4}{9}\cdot 200\right)^{100}=\left(\frac{800}{9}\right)^{100}>1.$$

Dakle, ako je $\frac{200^{300}}{300^{200}}>1$, znači da je $200^{300}>300^{200}$.