35. Vijetove formule

Rešenja kvadratne jednačine izražavaju se pomoću njenih koeficijenata, te se i veze između samih rešenja mogu izraziti preko tih koeficijenata. Dve jednačine koje nam daju međusobnu vezu između rešenja ćemo zvati **Vijetove formule** (Fransoa Vijet 1540-1603) i one imaju oblik:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{i} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Najjednostavnija primena je da pomoću rešenja kvadratne jednačine formiramo kvadratnu jednačinu čija su ona rešenja, jer očigledno važi:

$$a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2\right] = a\left[x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right] = ax^2 + bx + c.$$

Primer 1. Napiši kvadratnu jednačinu čija su rešenja $x_1 = 3 \wedge x_2 = -2$.

$$x_1 + x_2 = 3 + (-2) = 1,$$

$$x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot (-2) = -6.$$

$$a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2\right] = a\left[x^2 - 1 \cdot x + (-6)\right] = x^2 - x - 6.$$

Ako nam u ovakvom zadatku nije naglašeno koju vrednost treba da ima koeficijent a onda mi uzimamo da je $a = 1$ i tako dobijamo da je tražena jednačina

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Za vežbu i domaći zadatak uraditi:

ZADATAK 1. Sastavi kvadratnu jednačinu ako su data njena rešenja:

a) $x_1 = 2 \wedge x_2 = 5$,

b) $x_1 = -6 \wedge x_2 = -1$,

c) $x_1 = -1 \wedge x_2 = 3$,

d) $x_1 = 2 \wedge x_2 = \frac{1}{2}$,

e) $x_1 = 2 + \sqrt{3} \wedge x_2 = 2 - \sqrt{3}$,

f) $x_1 = 2 + i\sqrt{3} \wedge x_2 = -i\sqrt{3}$.

Rešenje: ***Domaći zadatak.***

ZADATAK 2. U jednačini $mx^2 - (3m+1)x + m = 0$ odredi vrednost realnog parametra *m* tako da važi $x_1 + x_2 = 5$.

Rešenje:

Rešenje ovakvih zadataka dobijamo (u opštem slučaju) iz sistema tri jednačine sa tri nepoznate:

$$x_1 + x_2 = 5 \qquad \text{- uslov zadatka}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-(3m+1)}{m} = \frac{3m+1}{m} \qquad \text{- prva Vijetova formula}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m}{m} = 1 \qquad \text{- druga Vijetova formula}$$

pri čemu nam je traženo rešenje samo nepoznati parametar *m*.

U ovom konkretnom slučaju dovoljne će nam biti samo prve dve jednačine, tj.

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$x_1 + x_2 = \frac{3m+1}{m}, \qquad m \neq 0.$$

Ako metodom zamene u drugu jednačinu umesto $x_1 + x_2$ stavimo 5 dobijamo:

$$5 = \frac{3m+1}{m}.$$

Pošto smo konstatovali da mora biti $m \neq 0$, prethodnu jednačinu možemo pomnožiti sa *m* iz čega dobijamo

$$5m = 3m + 1$$

$$2m = 1$$

$$m = \frac{1}{2}.$$

Dakle, ako uzmemo da bude $m = \frac{1}{2}$ onda će zbir rešenja polazne jednačine biti 5.

ZADATAK 2. U jednačini $x^2-(m+1)x+m=0$ odredi realan broj m tako da njena rešenja zadovoljavaju jednakost $x_1^2+x_2^2=10$.

Rešenje:

Rešenje tražimo u sistemu jednačina:

$$x_1^2+x_2^2=10$$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-(m+1)}{1}=m+1$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{m}{1}=m.$$

Ako prvu jednačinu proširimo do kvadrata binoma dobijamo sledeće:

$$x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2,$$

tj.

$$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=10$$

$$x_1+x_2=m+1$$

$$x_1x_2=m.$$

Ako u prvu jednačinu ubacimo vrednosti druge dve jednačine dobijamo da je

$$(m+1)^2-2m=10,$$

i sada samo rešimo datu kvadratnu jednačinu:

$$m^2+2m+1-2m-10=0$$

$$m^2-9=0$$

$$m_1=-3\wedge m_2=3.$$

ZADATAK 3. Ne rešavajući kvadratnu jednačinu $3x^2-x-7=0$ odrediti numeričku vrednost izraza $x_1^3+x_2^3$.

Rešenje:

Slično kao u prethodnom zadatku, izraz $x_1^3 + x_2^3$ transformišemo u oblik koji sadrži samo „blokove" sačinjene od izraza $x_1 + x_2$ ili $x_1 x_2$ koje pomoću Vijetovih formula pretvaramo u numeričke vrednosti količnika koeficijenata date kvadratne jednačine, tj.

$$x_1^3 + x_2^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1^2 x_2 - 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 - 3x_1 x_2^2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$$

što dobijamo iz formule $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2 B + 3AB^2 + B^3$.

Sada iz Vijetovih formula

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{7}{3}$$

dobijamo da je

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 3\left(-\frac{7}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27} + \frac{7}{3} = \frac{1+63}{27} = \frac{64}{27}.$$

DOMAĆI ZADATAK: Vene T. Bogoslavov 2 – 482, 483, 488-490, 498 b), c).